points A, M_0 et M_n sont alignés.

PROBLEME **(10 points)**

Soit f : IR $\longrightarrow$ IR; $x \mapsto f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A-1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/a- Déterminer les branches infinies de ($\mathcal{C}$).

b- Tracer ($\mathcal{C}$).

3/a- Montrer que f est une bijection de IR sur IR_+^*.

b- Tracer la courbe ($\mathcal{C}'$) représentative de la fonction f^{-1} de f.

c- Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4/a- Vérifier que pour tout x on a $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

b- Soit λ un réel strictement négatif.

Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B- $\forall n \in IN^*$ et $\forall x \in IR^-$, on pose $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$.

1/a- Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \text{Log}2$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$.

2/a- Montrer que pour tout entier naturel non nul n **et pour tout x de IR$^-$** on a: $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1-e^{nx}}{n}$

b- Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite du problème on pose $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3/a- Vérifier que pour tout $t \leqslant 0$, $2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2$.

b- Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et $\forall x \leqslant 0$, on a:

$$\frac{1-e^{nx}}{2n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$$

c- En déduire un encadrement de R_n pour $n \geqslant 2$.

4/ Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n on pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt$.

a- Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

b- Montrer que $G_1(x)+G_2(x)+G_3(x)+...+G_n(x)=-F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x)$.